Έστω η $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

[η f είναι συνεχής αφού $\|\bar{x}\| - \|\bar{x}_0\| \le \|\bar{x}-\bar{x}_0\|$]. Ποιες είναι (αν έχει) οι μερικές παράγωγοι της f στο $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$;

$f(\bar{x}) = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

$$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{d}{dx_i}\sqrt{x_1^2+\dots+x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i+1}^2+\dots+x_n^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2x_i}{\sqrt{\dots}} = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|} \quad \forall \bar{x}\neq\bar{0}$$

Τα θεωρούμε σταθερές εδώ αφού παραγωγίζουμε ως προς x_i

$$\Rightarrow \forall\bar{x}\neq\bar{0}: \nabla\|\bar{x}\| = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$$

και $\nexists\, \nabla\|\bar{x}\|$ για $\bar{x}=\bar{0}$

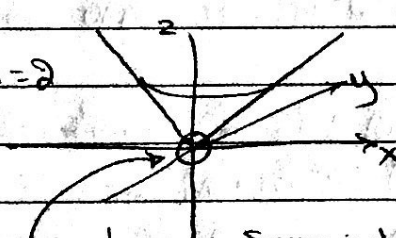
Στο $\bar{x}_0=\bar{0}$, τι συμβαίνει; Αν $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{0})\in\mathbb{R}$.

Αν $\forall i=1,\dots,n\ \exists \lim_{h\to0}\frac{f(\bar{0}+h\bar{e}_i)-f(\bar{0})}{h} =$

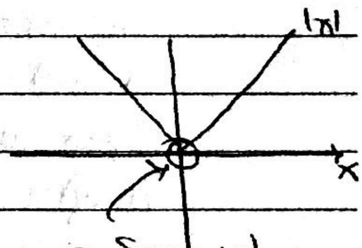
$$=\lim_{h\to0}\frac{\|h\bar{e}_i\|-\|\bar{0}\|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\ \nexists \text{ στο } \mathbb{R}$$

Ερμηνεία: Για $n=1$ (διάσταση του $\mathbb{R}^n$), $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} \overset{n=1}{=} \sqrt{x_1^2}=|x|$

Για $n=2$

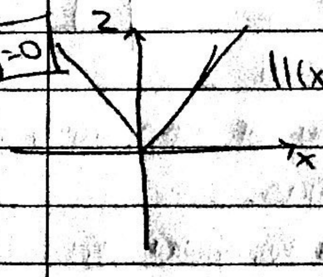


$\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$



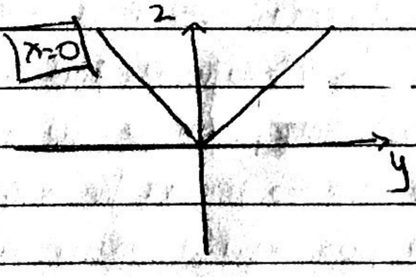
όχι μερικώς διαφορίσιμη η $(x,y)\mapsto\|(x,y)\|$ — όχι διαφορίσιμη

$\boxed{y=0}$



$\|(x,0)\|$

$\boxed{x=0}$



$\|(0,y)\|$

No. 2 Date

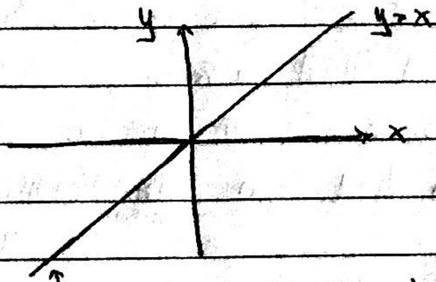
__Παράδειγμα:__ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, αφού $(x,y)\mapsto x$, $(x,y)\mapsto y$ (προβολές στους άξονες).

είναι συνεχής ($|x-x_0|\leq\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$) $\underset{\text{αλγ. ορίων}}{\Rightarrow}$ $(x,y)\mapsto xy$, $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ είναι συνεχείς (σε όλο το $\mathbb{R}^2$)

(αλγ. ορίων) $\Rightarrow$ η ρητή συνάρτηση που (καταρχάς) ορίζεται (σίγουρα) στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$]

$\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}\mapsto\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Είναι συνεχής στο $(0,0)$; ΟΧΙ



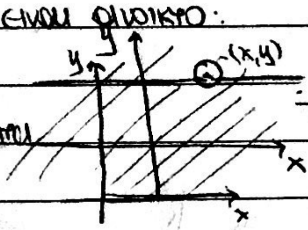
Δηλ. ισχύει $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \neq(0,0)}} f(x,y)=0$;

$\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

Όχι, αφού για τα για την ακολουθία έχω ότι $\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$
$(x_\nu,y_\nu)=\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)\to(0,0)$ ισχύει $f(x_\nu,y_\nu)=\dfrac{1}{2}\neq0$.

__Συμπέρασμα:__ Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, αλλά __δεν είναι συνεχής__ στο $(0,0)$.

Μερική παράγωγος στο $(x,y)\neq(0,0)$. [Το $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ είναι ανοικτό:
$\forall(x,y)\neq(0,0)\ \exists\,\varepsilon>0\ B((x,y),\varepsilon)\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$



και (όπως τα όρια, η συνέχεια) η μερική διαφορισιμότητα είναι μια __τοπική ιδιότητα__ της $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ (ισοδ.-πληροφορία) όταν εξετάζω αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή (μερικώς) διαφορίσιμη __σε ένα σημείο__, αρκεί να περιοριστώ σε μια όσο μικρή θέλω ανοικτή μπάλα με κέντρο το σημείο.

[__Συνέπεια:__ Δεν μας πειράζει που σε πολλά πράγματα θεωρήσαμε: «Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό», θα περιοριζόμαστε σε ανοικτά υποσύνολα όπου χρειάζεται».]

- Αρκεί να εξετάσω αν υπάρχει η μερική παράγωγος στο $f|_{B((x,y),\varepsilon)}$
όπου $F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in B((x,y),\varepsilon)$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Είδαμε συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, όχι συνεχής στο $(0,0)$

Για $(x,y) \neq (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial_x(x,y)}{x^2+y^2} + xy\,\partial_x\left((x^2+y^2)^{-1}\right)$

∂x της f περιορισμένης στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} + xy\left((-1)\frac{\partial_x(x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)y - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Για λόγους συμμετρίας προφανώς $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Είναι η f μερικώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq 0}}\frac{f(h,0)}{h} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq 0}}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$ Επίσης (συμμετρία) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ η f είναι μερ διαφ στο $(0,0)$ με $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Άρα, η f μερικώς διαφορίσιμη (σε όλο το $\mathbb{R}^2$), και ως μην είναι συνεχής στο $(0,0)$?! [Δηλ: f μερικώς διαφορ σε ένα σημείο $\not\Rightarrow$ f συνεχής σε αυτό το σημείο ?!]

[Αυτό συμβαίνει στο παράδειγμα, επειδή το $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ προκύπτει από την παραγώγιση (διαφόριση) στο $x=0$ ως προς x της f περιορισμένης στον άξονα των x, όπου όμως η f είναι σταθερή $=0$].

[Θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα?!]

http://www.tanenghong.com

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $n \geq 2$ $(m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\})$

Η $\bar{f}$ λέγεται <u>μερικώς διαφορίσιμη</u> στο $\bar{x} \in U$ ως προς την i-οστή μεταβλητή.
<u>μερ. διαφ. στο $\bar{x} \in U$</u>, όταν είναι μερ. διαφ. στο $\bar{x}$ ως προς x_i, $\forall i = 1, \ldots, n$.
μερ. διαφ., όταν είναι μερ. διαφ. σε κάθε $\bar{x} \in U$.
$\Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, m$, $\forall i = 1, \ldots, n$ $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Ο πίνακας [προσοχή στη διάταξη γραμμών και στηλών: συνιστώσες $f_j \to$ γραμμές, συντεταγμένες $x_i \to$ στήλες]

$$J_{\bar{f}}(\bar{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$ και για $\boxed{m=1}$ έχουμε $J_f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})$

<u>Προσοχή</u>: Γενικά, ως συνήθως, διανύσματα $\in \mathbb{R}^n$, θα θεωρούνται πάντα ως πίνακες $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Παρόλα αυτά, ιδίως την ανάλυση, σε αντίφαση με αυτό, γράφουμε τις $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ και -ακόμα χειρότερα- αντί για το σωστό $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, γράφουμε $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

<u>Όταν όμως</u> θα πρέπει να κάνουμε πράξεις με διανύσματα και πίνακες θα πρέπει να ακολουθούμε τον σωστό κανόνα (βλ. αρχή της παρατήρησης).

$\xrightarrow[\text{βλ. Παρατήρηση}]{}$ <u>Θεώρημα</u>: (Άλγεβρα Ιακωβιανών Πινάκων): Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $n \geq 2$, και $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar{x} \in U$. Τότε οι συναρτήσεις: $\bar{f} + \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $\varphi \cdot \bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$
$\bar{f} \cdot \bar{g} : U \to \mathbb{R}$
είναι μερικώς διαφ. στο $\bar{x} \in U$ ($\Leftrightarrow \exists$ Ιακωβ. πίνακας στο $\bar{x}$)

και ισχύουν:

(α) $J_{\bar f+\bar g}(\bar x) = J_{\bar f}(\bar x) + J_{\bar g}(\bar x)$

(β) $\underbrace{\nabla(\bar f\cdot\bar g)(\bar x)}_{=\underbrace{\bar f(\bar x)}_{\in\mathbb{R}^m}\underbrace{\bar g(\bar x)}_{\in\mathbb{R}^m}\in\mathbb{R}} = \underbrace{\bar f(\bar x)^T}_{\in\mathbb{R}^{1\times m}}\underbrace{J_{\bar g}(\bar x)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} + \bar g(\bar x) J_{\bar f}(\bar x) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

(γ) $J_{\varphi\bar f}(\bar x) = \varphi(\bar x) J_{\bar f}(\bar x) + \bar f(\bar x)\nabla\varphi(\bar x)$

Απόδειξη:

(α) [Ουσιαστικά πρέπει να δείξουμε αν υπάρχουν οι Ιακωβιανοί Πίνακες στα αριστερά των τύπων αυτών και ισούται με τις εκφράσεις στα δεξιά]

$$J_{\bar f+\bar g}(\bar x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1+g_1)(\bar x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(f_1+g_1)(\bar x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial(f_m+g_m)(\bar x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(f_m+g_m)(\bar x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

ιδιότητες παραγώγου πραγμ. συνάρτ. μιας μεταβλ.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar x) + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar x) + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar x) \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= J_{\bar f}(\bar x) + J_g(\bar x)$$

(β) $\nabla(\bar f\cdot\bar g)(\bar x) = \nabla(\underbrace{\bar f(\bar x)}_{\in\mathbb{R}^m}\cdot\bar g(\bar x)) = \nabla\Big(\sum_{j=1}^m \underbrace{f_j(\bar x)\, g_j(\bar x)}_{\in\mathbb{R}}\Big) =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\underbrace{\sum_{j=1}^m f_j(\bar x) g_j(\bar x)}_{\in\mathbb{R}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Sigma\right) =$$

ιδιότητες παραγώγου πραγμ. συνάρτ. μιας πραγμ. μετ.

$$\left(\sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(f_j(\bar x) g_j(\bar x))}_{=g_j(\bar x)\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\bar x) + f_j(\bar x)\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\bar x)}, \ldots, \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n}(f_j(\bar x) g_j(\bar x))}_{=g_j(\bar x)\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\bar x) + f_j(\bar x)\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar x)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (f_j(\bar{x}) g_j(\bar{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} (f_j(\bar{x}) g_j(\bar{x})) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[g_j(\bar{x}) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) \right] + \sum_{j=1}^{m} \left[f_j(\bar{x}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) \right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} g_j(\bar{x}) \nabla f_j(\bar{x})} + \sum_{j=1}^{m} f_j(\bar{x}) \nabla g_j(\bar{x}) \qquad J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$= (g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})) J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \underbrace{(g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x}))}_{\in \mathbb{R}^{1\times m}} \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Άρα, τελικά, $\nabla(\bar{f} \cdot \bar{g})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x})^T J_{\bar{f}}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x})^T J_{\bar{g}}(\bar{x})$, όπου θεωρούμε

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \bar{f}(\bar{x})^T = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{1\times m}$$

$$\text{δ)} \underbrace{J_{\varphi \bar{f}}(\bar{x})}_{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \in \mathbb{R}^{m\times n}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi f_1)(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}(\varphi f_1)(\bar{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi f_m)(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}(\varphi f_m)(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες παραγώγισης
γινομένου
μιας μεταβλ.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & f_1(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ f_m(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & f_m(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\bar{x}) & \dots & \varphi(\bar{x}) \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \varphi(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\bar{x}) & \dots & \varphi(\bar{x}) \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}}_{= \underbrace{\varphi(\bar{x}) J_{\bar{f}}(\bar{x})}_{\in \mathbb{R} \ \in \mathbb{R}^{m\times n}}}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)}_{= \nabla \varphi(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{1\times n}}$$

$\mathbb{R}^{m\times 1} \ni \bar{f}(x) =$

$$\to J_{\varphi \bar{f}}(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) J_{\bar{f}}(\bar{x}) + \underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{m\times 1}} \underbrace{\nabla \varphi(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}}$$

Ορισμός: (ουσιαστικά ο γενικότερος του Α.Λ. III)

Η $\bar f : U \to \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ανοιχτό, λέγεται (α) διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$:⟺ $\underbrace{\exists \text{ γραμμική απεικόνιση } D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}_{:\Leftrightarrow \text{ πίνακας } D \in \mathbb{R}^{m \times n}}$ έτσι ώστε

$$\boxed{\lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{\bar f(\bar x + \bar h) - \bar f(\bar x) - D\bar h}{\|\bar h\|} = \bar 0} \ (\in \mathbb{R}^m)$$

(β) Διαφορίσιμη:

:⟺ η $\bar f : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $\bar x \in U$

Ειδικότερα, για $n \in \mathbb{N}$ και $m = 1$. Η $f : U \to \mathbb{R}$ λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$:⟺ $\exists D \in \mathbb{R}^{1 \times n} : \lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{f(\bar x + \bar h) - f(\bar x) - D\bar h}{\|\bar h\|} = 0 \ (\in \mathbb{R})$

και για $n = 1$ και $m = 1$: Η $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό, λέγεται διαφορίσιμη στο $x \in I$:⟺ $\exists D \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0 \ (\in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}^{= f'(x)} = D$$

Επίσης από τον ορισμό ορίου διαν. συναρτήσεις:

Η $\bar f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$.

$$\Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, m : \lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{f_j(\bar x + \bar h) - f(\bar x) - \overbrace{(d_{j1} \dots d_{jn})}^{j\text{-γραμμή του } D} \bar h}{\|\bar h\|} = 0, \text{ όπου}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

Από (SOS): Η $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$

$\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots, n$ οι $f_j : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο $\bar{x} \in U$.

$\boxed{\text{SOS}}$: **Θεώρημα**: Έστω ότι η $\bar{f} : \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό) είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$.

Τότε: (α) Η $\bar{f}$ είναι συνεχής στο $\bar{x} \in U$.

(β) Η $\bar{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$ και για το $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ του ορισμού ισχύει $D = J\bar{f}(\bar{x})$.

Απόδειξη:

(α) $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \underbrace{\left(\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x})\right)}_{= \|\bar{h}\| \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} + D\bar{h}} = \bar{0}$. Έστω ότι $\exists D \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$

$\in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Διάσπαση ορίων αν αυτά υπάρχουν τα όρια στα δεξιά

$= \underbrace{\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \|\bar{h}\|}_{=0} \underbrace{\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|}}_{= \bar{0} \text{ εξ ορισμού - υπόθεσης}} + \underbrace{\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} D\bar{h}}_{= \bar{0}\ (*)}$

(*) $\|D\bar{h}\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left((d_{j1}, \dots, d_{jn})\bar{h}\right)}_{\le \|(d_{j1}, \dots, d_{jn})\| \|\bar{h}\|}^2 \le \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\|(d_{j1}, \dots, d_{jn})\|^2}_{\sum_{i=1}^{n} d_{ji}^2} \|\bar{h}\|^2 =$

$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_{ji}^2\right)}_{=: \|D\|^2 \ge 0} \|\bar{h}\|^2 \Rightarrow \|D\bar{h}\| \le \|D\| \|\bar{h}\|$

Άρα, αρκεί (ισοδύναμα) $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} D\bar{h} = \bar{0} \overset{\text{διότι}}{\underset{}{\text{αρκεί}}} \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \|D\bar{h}\| = 0$ και επειδή

$\|D\bar{h}\| \le \|D\| \|\bar{h}\|$ προκύπτει το αποδεικτέο.